10/05/2019
(Απειροστικός ΙΙ
Σαρρηγά)

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx$$

$u = \tan\frac{x}{2}$

$du = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\tan^2 x/2}{2}\right) = \frac{1+u^2}{2}dx$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du$

$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2\frac{\sin x/2}{\cos x/2}\cdot\cos^2 x/2$

$= 2\tan x/2 \cdot \cos^2 x/2 = \frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} = \frac{2u}{1+u}$

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$= \int \frac{\frac{1+u^2-2u}{1+u^2}}{\frac{2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{1+u^2-2u}{1+u^2}du$$

$$= \int\left(1-\frac{2u}{1+u^2}\right)du = u - \ln(1+u^2)+c$$

$$= \tan\frac{x}{2} - \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+c$$

$$\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}dx = \int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} \quad (*)$$

$$\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{\Gamma}{(x+2)^2}$$

$$5x^2+12x+1 = A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+\Gamma(x-1)$$

$$\Rightarrow 5x^2+12x+1 = (A+B)x^2+(4A+B+\Gamma)x+(4A-2B-\Gamma)$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 4A+B+\Gamma=12 \\ 4A-2B-\Gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ \Gamma=1 \end{cases}$$

$$(*)\ \int \frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3}{x+2}dx+\int\frac{1}{(x+2)^2}dx$$

$$= 2\ln|x-1|+3\ln|x+2|-\frac{1}{x+2}+C$$

$$= \int \frac{x+1}{x(x-1)^2(x^2+1)^2}dx$$

Αυτό γράφεται ως εξής

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{(x-1)^2}+\frac{\Delta x+E}{x^2+1}+\frac{Zx+H}{(x^2+1)^2}$$

* Πολυώνυμα μεγαλύτερα του 2 τα Ξαναπαραγοντοποιώ γιατί θέλω βαθμού 1ου ή 2ου *

* Όταν έχω δευτεροβάθμιο στον παρονομαστή βάζω πολυώνυμο στον αριθμητη *

Πολλαπλασιάζω, τα φέρνω σε μια μορφή λύνω σύστημα

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}dx \qquad \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}+\frac{\Delta x+E}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow x+1 = A(x^2+1)^2+(Bx+\Gamma)(x-1)(x^2+1)+(\Delta x+E)(x-1)$$

$\Rightarrow$ $A=\frac{1}{2}$ $\quad B=-\frac{1}{2}$ $\quad \Gamma=-\frac{1}{2}$, $\Delta=-1$, $E=0$

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{1/2}{x-1}\,dx+\int \frac{-1/2\,x-1/2}{x^2+1}\,dx+\int \frac{-x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=1/2\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\text{Arctan}x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}+c\right)$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx \quad \frac{y=x^2+1}{dy=2x\,dx} \quad \int \frac{1}{y^2}\,dy=-\frac{1}{y}+c$$

$$=\frac{1}{x^2+1}+c$$

$$\frac{x^2+x+3}{(x-1)x^2(x^2+x+1)^2(x^2+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{\Gamma}{x^2}+\frac{\Delta x+E}{x^2+x+1}+$$

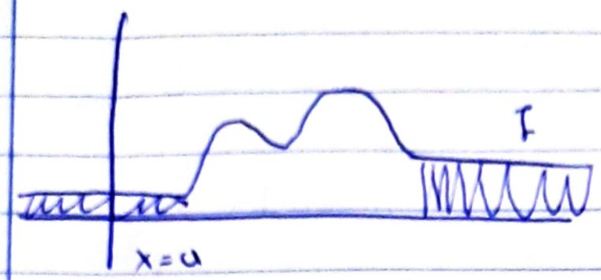
$$\frac{Zx+H}{(x^2+x+1)^2}+\frac{\Theta x+I}{x^2+1}+\frac{Kx+\Lambda}{(x^2+1)^2}+\frac{Mx+N}{(x^2+1)^3}$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Τύπου 1: Αν $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση τ.ω. η F να είναι ολ/μη στο $[\alpha, t]$ (αντ. $[t,\alpha]$) $\forall t>\alpha$ (αντ. $\forall t<\alpha$)

ορίζουμε $\displaystyle\int_{\alpha}^{\infty} F(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{\alpha}^{t} F(x)\,dx$

Αν το όριο υπάρχει τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, αλλιώς αποκλίνει



<u>Ορίζουμε</u>: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

Συγκλίνει αν-αν $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ συγκλίνουν

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>: ① $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} x\cdot e^{x}\,dx = -1$

$\int xe^{x}\,dx = \int x\,(e^{x})'\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x} + c$

$\int_{t}^{0} x\cdot e^{x}\,dx = [xe^{x} - e^{x}]_{t}^{0} = -1 - t\,e^{t} + e^{t}$

$\lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$

$\lim_{t\to-\infty} t\cdot e^{t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{-e^{-t}} = 0$

Άρα $-t - te^{t} + e^{t} \xrightarrow{t\to\infty} -1$ Συγκλίνει

② $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{t} = \lim_{t\to+\infty} (-1/t + 1) = 1$

Συγκλίνει

③ $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to \infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t\to\infty} [2\sqrt{x}]_1^t$

$= \lim_{t\to\infty} (2\sqrt{t} - 2) = +\infty$ Αποκλίνει

④ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

Τόξο άξονας x γίνεται άξονας y

$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= \lim_{t\to\infty} [\text{Arctan}x]_0^t =$

$= \lim_{t\to\infty} \text{Arctan}t = \frac{\pi}{2}$ Συγκλίνει

$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to-\infty} [\text{Arctan}x] =$

$= \lim_{t\to-\infty} -\text{Arctan}x = \frac{\pi}{2}$ Συγκλίνει

$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} F(x)dx + \lim_{t\to\infty} \int_{-1}^{0} F(x)dx$

$= \lim_{t\to\infty} \int_{-1}^{1} F(x)dx$ ΛΑΘΟΣ ισχύει μόνο αν το $\int_{\alpha}^{\infty} F(x)dx$

$\int_{-\infty}^{0} F(x)dx$ συγκλίνει

Παράδειγμα $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ αποκλίνει γιατί $\int_{0}^{\infty} x\,dx =$

$\lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} x\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2} = +\infty$

$\lim_{t\to\infty} \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

ολ/μη στο $[\alpha, t]$ $\forall\, t \geq \alpha$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \infty)$

Τότε $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ συγκλίνει ή $\int_\alpha^\infty f(x)dx = \infty$

Μάλιστα $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ συγκλίνει αν-ν η συνάρτηση $F(t) = \int_\alpha^t f(x)dx$ είναι φραγμένη

Απόδειξη: Η F είναι αύξουσα συνάρτηση: $[\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$

Έστω $\alpha < t < s \Rightarrow F(s) - F(t) = \int_t^s f(x)dx \geq 0$

Άρα το $\lim\limits_{t \to \infty} F(t)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αν-ν η F είναι φραγμένη

Αν η F δεν είναι φραγμένη, τότε $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = +\infty$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $n \in \mathbb{N}$ $\int_1^n f(x)dx = \int_1^2 \overset{\leq f(1)}{f(x)} dx + \int_2^3 \overset{\leq f(2)}{f(x)} dx + \dots + \int_{n-1}^n \underset{\geq f(n-1)}{f(x)} dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$

Ομοίως $\int_1^n f(x)dx \geq f(2) + \dots + f(n)$

$$f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \dots + f(n-1)$$